Décomposition en éléments simples

Dans ce poly, on s'intéresse à une variante du théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, dont vous avez besoin notamment en SII.
On prouvera (partiellement) ce théorème, puis on donnera quelques indications pratiques pour son utilisation.

Table des matières

1 Le théorème

Théorème 1.1 On considère un polynôme P de la forme $P = \lambda(X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2}\dots(X-a_p)^{m_p} = \lambda \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{m_i}$
où :
- $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- $p \in \mathbb{N}^*$,
- les (a_i) sont des réels deux à deux distincts (ce sont les *racines* du polynôme),
- pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $m_p \in \mathbb{N}^*$ (ce sont les *multiplicités* des racines).

(On remarque que le degré de P est $d = \sum_{i=1}^{p} m_i$.)
Soit Q un polynôme de degré strictement inférieur à celui de P.
Alors, il existe des réels $b_{i,k}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) \neq 0$, on ait

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{b_{i,k}}{(x-a_i)^k}.$$

Ces réels sont de plus uniques.

On parle de **décomposition en éléments simples** de la fraction rationnelle $\frac{Q}{P}$. Le théorème fournit la *forme* de cette décomposition. Il faudra ensuite déterminer les coefficients $b_{i,k}$. Il y a plusieurs méthodes pour faire cela, qui seront détaillées ci-dessous.

Rem
- Il s'agit d'une version affaiblie d'un théorème plus général, qui permet d'effectuer des décompositions en éléments simples pour tout polynôme, même s'il contient des facteurs du type X^2+1, et ne peut donc pas se mettre sous la forme indiquée.
- Pour appliquer le théorème, il va falloir factoriser le polynôme P. Le chapitre sur les polynômes indiquera des méthodes pour y parvenir.

Avant de passer à la preuve, quelques exemples :

Exemples 1.1

- Il existe un unique triplet de réels (a, b, c) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$, $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$.
(Dans ce cas, toutes les multiplicités valeur 1, et donc il n'y a qu'un seul terme dans chacune des sommes indicées par k. On a pris $Q = 1$).
- Il existe un unique quintuplet de réels (μ, ν, a, b, c) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $\dfrac{1}{x^3(x-1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3} + \dfrac{\mu}{x-1} + \dfrac{\nu}{(x-1)^2}$. (On a encore pris $Q = 1$).
- Il existe un unique quintuplet de réels (μ, ν, a, b, c) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, $\dfrac{x^4-x^2+1}{(x+1)^3(x-1)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{(x+1)^3} + \dfrac{\mu}{x-1} + \dfrac{\nu}{(x-1)^2}$ (on a $Q = X^4 - X^2 + 1$, qui est bien de degré strictement inférieur à celui du dénominateur).

2 Preuve

Cette section peut être omise si vous voulez simplement voir comment utiliser le théorème. On ne peut pas mener la preuve jusqu'au bout avec les moyens de PCSI – il nous manque un théorème fondamental – mais le début de la preuve permet déjà de comprendre un peu ce qui se passe.

2.1 Division euclidienne

Cette preuve nécessite le résultat suivant, que nous verrons dans le chapitre sur les polynômes :

Théorème 2.1 (Division euclidienne des polynômes)
Soient A et B deux polynômes, B étant non-nuls. Alors, il existe une unique couple de polynômes (Q, R) tels que :
- $A = BQ + R$
- $\deg R < \deg B$.

Q est R sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne de A par B. On peut les calculer en posant la division comme vous avez appris à le faire pour des divisions d'entiers.
Par exemple, pour $A = X^3 - 3X^2 + 3X + 1$ et $B = X - 2$, on obtient $Q = X^2 - X + 1$ et $R = 3$, i.e.

$$X^3 - 3X^2 + 3X + 1 = (X-2)(X^2 - X + 1) + 3.$$

2.2 Existence de la décomposition en éléments simples

On prouve d'abord l'**existence**. On va pour cela utiliser des polynômes formels avec une variable X. Le chapitre sur les polynômes indiquera précisément comment relier cela à des *fonctions polynômiales*, que l'on peut évaluer en des points réels ($P(x)$).

On commence par prouver le résulat lorsque P n'admet qu'une seule racine – i.e. est de la forme $P = \lambda(X-a)^n$. On cherche à montrer que pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n, on peut écrire $\dfrac{Q}{P}$ sous la forme $\dfrac{a_1}{X-a} + \dfrac{a_2}{(X-a)^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{(X-a)^n}$, où $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On raisonne pour cela par récurrence sur la multiplicité de la racine.

Initialisation Supposons que P admette une seule racine simple. Il est donc de la forme $P = \lambda(X-a)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $a \in \mathbb{R}$.
Q est nécessairement constant – on peut noter $Q = \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{\mu/\lambda}{X-a}$, ce qui est bien de la forme voulue.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat vrai pour tout polynôme ayant une seule racine de multiplicité n. Soit $P = \lambda(X-a)^{n+1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $a \in \mathbb{R}$.
Soit Q de degré inférieur (ou égal) à n.
On effectue la division euclidienne de Q par $X-a$. On obtient alors deux polynômes A et B tels que $Q = (X-a)A + B$, où B est de degré 0, c'est-à-dire constant. On note $B = b \in \mathbb{R}$.
On a donc $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{(X-a)A + B}{\lambda(X-a)^{n+1}} = \dfrac{A}{\lambda(X-a)^n} + \dfrac{b}{\lambda(X-a)^{n+1}}$.
Comme A est de degré strictement inférieur à n, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au premier terme, pour l'écrire sous la forme $\dfrac{a_1}{X-a} + \dfrac{a_2}{(X-a)^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{(X-a)^n}$, où les a_i sont des réels.
On obtient alors $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{a_1}{X-a} + \dfrac{a_2}{(X-a)^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{(X-a)^n} + \dfrac{b\lambda}{(X-a)^{n+1}}$, ce qui conclut l'hérédité.

Pour achever la preuve pour des polynômes P avec un nombre arbitraire de racines, **on procède ensuite par récurrence sur le nombre de racines de P.** On a pour cela besoin d'un résultat hors programme en PCSI, donc je ne détaille pas la fin de la preuve.

2.3 Unicité de la décomposition en éléments simples

On reprend l'intégralité de la preuve ci-dessus, et l'on constate que tous les coefficients trouvés dans les hérédités sont entièrement déterminés commes des résultats de divisions euclidiennes (c'est aussi le cas dans la partie de preuve que j'ai omise). Le premier coefficient, trouvé dans l'initialisation de la première récurrence est évidemment unique. On peut donc rajouter partout dans la preuve qu'il y a unicité des coefficients obtenus.

3 Recherche des coefficients

Plusieurs méthodes sont possibles pour rechercher les coefficients – l'idée étant toujours de rechercher autant de relations que de coefficients.

On considère comme exemple $x \mapsto \dfrac{1}{x^3(x-1)(x-2)}$. D'après le théorème, on sait qu'il existe des réels a, b, c, μ et ν tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$, on ait

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{\mu}{x-1} + \frac{\nu}{x-2}.$$

Évaluation en un point On prend une valeur particulière pour x. Dans l'exemple ci-dessus, si l'on prend $x = -1$, on obtient $-\dfrac{1}{6} = -a + b - c + \dfrac{\mu}{-2} + \dfrac{\nu}{-3}$.

En pratique, ce n'est pas très efficace, car on obtient une relation qui fait intervenir tous les coefficients.

Évaluation en une racine, après multiplication On commence par multiplier la relation par une expression de la forme $(x-a_i)^{m_i}$, où m_i est la multiplicité de la racine a_i dans P, puis l'on l'expression obtenue en $x = a_i$. C'est très efficace en pratique, car cela donne directement un coefficient [1].

- En multipliant la relation par $x-1$, on obtient

$$\frac{1}{x^3(x-2)} = \frac{a(x-1)}{x} + \frac{b(x-1)}{x^2} + \frac{c(x-1)}{x^3} + \mu + \frac{\nu(x-1)}{x-2}.$$

En évaluant en 1, on a alors $-1 = \mu$.

- En multipliant la relation par $x-2$, on obtient

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{a(x-2)}{x} + \frac{b(x-2)}{x^2} + \frac{c(x-2)}{x^3} + \frac{\mu(x-2)}{x-1} + \nu.$$

En évaluant en 2, on a alors $\dfrac{1}{8} = \nu$.

- En multipliant la relation par x^3, on obtient

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = ax^2 + bx + c + \frac{\mu x^3}{x-1} + \frac{\nu x^3}{x-2}.$$

En évaluant en 0, on a alors $\dfrac{1}{2} = c$.

Utilisation des limites On peut également calculer la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ des deux membres, après avoir multiplié par x. On obtient

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x-2)} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \mu\frac{x}{x-1} + \nu\frac{x}{x-2},$$

puis en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, $0 = a + \mu + \nu$.

Passer des termes dans le membre de gauche Supposons par exemple que l'on ait calculé $\mu = -1$, et $\nu = \dfrac{1}{8}$ à l'aide de la méthode «Évaluation en une racine, après multiplication». On peut alors passer les termes correspondants dans le membre de gauche, réduire au même dénominateur, et simplifier :

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x-2)} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{x-2} = \frac{1 + x^3(x-2) - \frac{1}{8}x^3(x-1)}{x^3(x-1)(x-2)} = \frac{\frac{7}{8}x^4 - \frac{15}{8}x^3 + 1}{x^3(x-1)(x-2)}$$

On factorise le numérateur par $(x-1)(x-2)$ [2] [3]

1. Il y a en fait un problème théorique : la relation de départ n'est pas valable en a_i, donc on ne peut pas vraiment évaluer en a_i... Pour rendre les choses propres mathématiquement, il faut en fait considérer la limite de chacun des deux membres lorsque $x \to a_i$. Mais calculer cette limite revient à remplacer x par a_i dans les expressions, étant donné qu'il n'y a plus de $(x-a_i)$ aux dénominateurs. On peut donc bien faire comme si de rien n'était...

2. C'est possible, car à ce stade, on sait que si x n'est pas une racine de P, $\dfrac{\frac{7}{8}x^4 - \frac{15}{8}x^3 + 1}{x^3(x-1)(x-2)} = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x}^2$. En passant à la limite lorsque x tend vers 1 ou 2, on voit que 1 et 2 sont nécessairement racines de $\dfrac{7}{8}x^4 - \dfrac{15}{8}x^3 + 1$.

3. Pour effectuer cette factorisation, on utilise la division euclidienne de polynômes, cf chapitre sur les polynômes.

On obtient $\dfrac{\left(\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)}{x^3(x-1)(x-2)} = \dfrac{\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}{x^3}$.
On est alors ramené à un problème de décomposition en éléments simples plus simple : trouver $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\frac{\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}{x^3} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}.$$

Le dénominateur est ici une puissance de x, donc c'est terminé : on a $a=\dfrac{7}{8}$, $b=\dfrac{3}{4}$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

En pratique, on commence par utiliser la méthode «Évaluation en une racine après multiplication», qui donne immédiatement des coefficients.

- S'il ne reste qu'un ou deux coefficients à déterminer (c'est de loin le cas le plus fréquent), on peut faire une «évaluation en un point», ou une «utilisation des limites».
- Sinon, on passe tous les termes déjà calculés dans le membre de gauche, et l'on simplifie. On s'est alors ramené à une décomposition en éléments simples où l'on a fait baisser les degrés, et l'on recommence.

4 Un exemple complet

Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2x(x+2)}$.
On sait qu'il existe des réels a,b,c et d tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-2\}$, on ait

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2x(x+2)} = \frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x+2}.$$

- On multiplie par $(x-1)^2$, et l'on évalue en 1. On obtient $a=2/3$.
- On multiplie par x, et l'on évalue en 0. On obtient $c=1/2$.
- On multiplie par $x+2$, et l'on évalue en -2. On obtient $d=-5/18$.
- Reste seulement à calculer b. Pour cela, on peut par exemple multiplier les deux membres par x, puis passer à la limite lorsque $x\to+\infty$. On obtient $0=b+c+d$, d'où $b=-c-d=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{18}=-\dfrac{4}{18}=-\dfrac{2}{9}$.

Finalement pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-2\}$, on a

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2x(x+2)} = \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{9}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{5}{18}\frac{1}{x+2}.$$

5 Applications

Il existe de nombreuses applications de la décomposition en éléments simples :

- Calculs de primitives et d'intégrales : difficile de primitiver $x\mapsto\dfrac{1}{x^2(x-1)}$ à vue. Mais si l'on trouve a,b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $\dfrac{1}{x^2(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x-1}$, on en déduit immédiatement une primitive sur $]1,+\infty[$: $x\mapsto a\ln(x)-\dfrac{b}{x}+c\ln(x-1)$ (attention à toujours avoir des signes dans les ln – il faut être attentif à l'intervalle sur lequel on se place. Sur $]0,1[$ par exemple , on obtiendrait comme primitive $x\mapsto a\ln(x)-\dfrac{b}{x}+c\ln(1-x)$)
- Calculs de dérivées : il est plus facile de dériver chaque élément simple que la fraction rationnelle de départ si P est sous forme factorisée.
- Calculs de sommes du type $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. On commence par décomposer en éléments simples la fraction, puis on fait apparaitre des télescopages par des changements de variables.
- Calculs des sommes de séries correspondantes (cf cours sur les séries).

Rem Le procédé de décomposition en éléments simples est entièrement automatisable – et l'on peut en particulier le coder sur un ordinateur. Cette méthode est par exemple utilisée par tous les logiciels de calcul formel pour calculer des primitives de fractions rationnelles quelconques.

6 Et si $\deg Q \geqslant \deg P$?

Le théorème ne s'applique pas immédiatement, mais on peut s'y ramener facilement.
On commence par effectuer la division euclidienne de Q par P (cf chapitre sur les polynômes). On obtient alors A et B tels que $Q=AP+B$, avec $\deg B<\deg P$.
On en déduit $\dfrac{Q}{P}=A+\dfrac{B}{P}$.

On s'est donc ramené au cas du théorème, car $\deg B < \deg P$. On peut donc calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{B}{P}$.

Par exemple, pour calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^4}{X^2-1}$, on commence par effectuer la division euclidienne de X^4 par X^2-1 – on trouve $X^4 = (X^2-1)(X^2+1)+1$. On écrit alors $\frac{X^4}{X^2-1} = \frac{(X^2-1)(X^2+1)+1}{X^2-1} = X^2+1+\frac{1}{X^2-1} = X^2+1+\frac{1}{(X-1)(X+1)}$, puis l'on calcule la décomposition en éléments simples de cette dernière fraction avec la méthode ci-dessus (ou plus astucieusement, en remarquant que $\frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{1}{2}\frac{(X+1)-(X-1)}{(X-1)(X+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+1}$).

7 Et s'il y a des facteurs de degré 2 irréductibles dans la forme factorisée de P (par exemple X^2+1) ?

Le théorème ne s'applique pas. Il existe une décomposition en éléments simples, mais avec une autre forme, qui fait apparaître les facteurs de degré 2. Je ne donne pas ce résultat si vous n'en avez pas besoin dans les autres disciplines, mais vous pourrez le trouver facilement sur le web si vous êtes intéressés.