Qu'est-ce-qu'un Dirac ?

Quelques pistes pour comprendre (de loin) comment donner un peu de sens mathématique à cet objet bizarre qu'est un Dirac [1].

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Un Dirac comme limite de fonctions **2**

3 Transformée de Laplace d'un Dirac **3**

4 Dirac et fonction d'Heaviside **4**

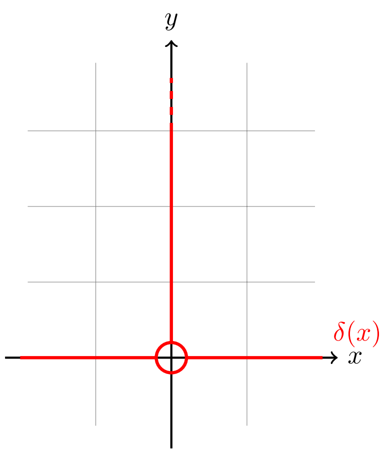
Remarque préliminaire

Dans ce poly, je vais écrire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ – i.e. une intégrale avec des bornes infinies, notion que nous n'avons pas définie dans le cours. Je n'utiliserai cette notation que pour des fonctions f qui sont nulles en dehors d'un certain intervalle $[-a, a]$. On peut donc la voir comme une autre notation pour $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt.$ [2]

1 Introduction

La «fonction de Dirac» est une fonction réelle δ que vous utilisez dans d'autres disciplines, qui satisfait les «propriétés» un peu étranges suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\delta(x) = 0$.
2. $\delta(0) = +\infty$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.



La «fonction de Dirac».

On voit rapidement que l'on n'est pas dans le cadre de ce que l'on fait en mathématiques :

- Le point 2 pose problème, cette fonction n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$, car $+\infty \notin \mathbb{R}$.
- Le point 3 également, l'interprétation en terme d'aire de l'intégrale ne fonctionne plus, ni la définition de l'intégrale vue dans le chapitre sur l'intégration (l'intégrale devrait être nulle, puisque la fonction est nulle partout sauf en un point...).

1. Du nom de son inventeur, Paul Dirac, Prix Nobel de Physique en 1933
2. Cf votre cours de l'an prochain pour une définition plus propre et plus générale de l'intégrale avec des bornes infinies.

De fait, si l'on manipule la «fonction de Dirac», on peut rapidement arriver à des absurdités. Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\delta(x) = \delta(x)$ (avec la convention «naturelle» $2 \times +\infty = +\infty$). On en déduit que $2 = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1\ldots$

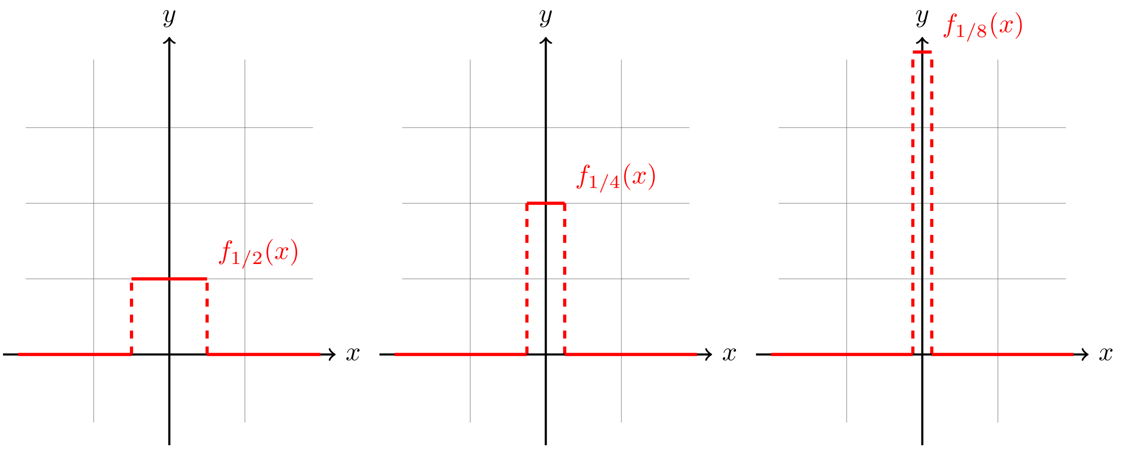
Cette «preuve» montre qu'en fait on ne peut pas définir de vraie fonction δ ayant les 3 propriétés ci-dessus. Pour un mathématicien, la fonction de Dirac n'existe simplement pas.

Reste que la notion de «fonction de Dirac» est bel et bien utile en physique, en S.I.I., etc. Il s'agit en fait d'un objet «informel», «intuitif», dont on se sert dans les calculs. Cet objet correspond à un objet mathématique précis et complexe appelé «distribution de Dirac» (ce ne peut pas une fonction comme nous l'avons vu ci-dessus), inventé par Laurent Schwartz dans le cadre de la *théorie des distributions* (qui lui vaut la Médaille Fields[3] en 1950).
Pas question de faire de la théorie des distributions, cela nécessite un bagage mathématique plus conséquent que ce que vous aurez en sortant de prépa (en particulier une théorie de l'intégration plus puissante que celle qui est au programme). Mais on peut essayer de donner une intuition mathématique partielle des choses.
Cela va permettre d'expliquer un peu mieux la propriété 3, en évitant les paradoxes du style du $2 = 1$ obtenu ci-dessus...

2 Un Dirac comme limite de fonctions

Intuitivement, on peut voir une distribution de Dirac comme la «limite» des fonctions[4] suivantes[5] lorsque $\epsilon \to 0$ (et $\epsilon > 0$) :

$$f_\epsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2\epsilon} & \text{si } x \in [-\epsilon, \epsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$



On ne s'autorise pas à voir δ comme une fonction (on a vu les dégats ci-dessus...), mais on s'autorise à en calculer l'«intégrale» dans le sens suivant – qui précise ce que l'on entend par «δ est la limite des f_ϵ» :

Définition 2.1 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt$ existe, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt.$$

Rem

- Attention, on ne voit pas δ comme une fonction – il faut vraiment voir $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt$ comme une notation pour la limite, rien d'autre.
- Ce résultat ressemble à un résultat d'interversion de limite et d'intégrale. Ça n'en est pas un, c'est juste une définition. De façon général, méfiance maximale pour les interversions de limite et d'intégrale, cf le chapitre sur l'intégration, et surtout votre cours de l'an prochain.

3. L'équivalent du Prix Nobel pour les Mathématiques. Pour la petite histoire, sur les 55 lauréats de la Médaille Fields depuis sa création, 13 lauréats sont français – au coude-à-coude avec les US : la France a toujours été en pointe au niveau mondial pour les Mathématiques de très haut niveau.
4. Qu'est-ce-qu'une limite de fonctions en général ? Question compliquée à laquelle vous répondrez partiellement l'an prochain...
5. En théorie des distributions, pour des raisons théoriques complexes, on ne choisit pas ces fonctions là.

Le point 3 de l'introduction est alors une application de cette définition.

Proposition 2.1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$

Démonstration :
Prenons g la fonction constante égale à 1 dans la définition.
Pour tout $\epsilon > 0$, on a
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f_\epsilon(t)dt$ (f_ϵ étant nulle hors de $[-\epsilon, \epsilon]$)
$\displaystyle = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon}dt = \frac{1}{2\epsilon}(\epsilon - (-\epsilon)) = 1.$
Comme $\displaystyle\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} 1$ existe et vaut 1, d'après la définition,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 1.\delta(t)dt = 1$, ce qui est le résultat voulu [6].

Proposition 2.2 Soit g une fonction continue en 0. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0).$$

Démonstration : Effectuons une preuve un peu informelle [7].
Pour tout $\epsilon > 0$,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(t)\frac{1}{2\epsilon}dt = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(t)dt.$
Si ϵ est «assez petit», comme g est continue en 0, pour tout $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, on a $g(t) \approx g(0)$ (ce n'est pas propre mathématiquement).
On a alors en reprenant les calculs
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt \approx \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(0)dt = \frac{g(0)}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} 1dt = g(0).$

Intuitivement, multiplier une fonction par une distribution de Dirac et intégrer revient à prendre la valeur de cette fonction au point 0.

3 Transformée de Laplace d'un Dirac

On voudrait maintenant calculer la transformée de Laplace d'un Dirac, c'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt.$$

Comme on a une intégrale sur $[0, +\infty[$, on va devoir revoir notre définition pour s'y adapter. Dans cette section, j'adopte les notations suivantes :

$$f_\epsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } x \in [0, \epsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Rem | Le $\dfrac{1}{2\epsilon}$ a été changé en $\dfrac{1}{\epsilon}$ pour que les fonctions aient toujours une intégrale égale à 1.

Définition 3.1 Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Si $\displaystyle\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{0}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt$ existe, on note

$$\int_{0}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{0}^{+\infty} g(t)f_\epsilon(t)dt.$$

(On peut alors montrer comme dans la proposition précédente, qu'avec ces nouvelles notations, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.)

6. Avec le petit abus de notation très naturel consistant à enlever le 1.
7. On peut la rendre propre après le cours sur la continuité.

On montre alors la propriété suivante :

Proposition 3.1 Pour tout $p \in \mathbb{R}^*$,
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = 1.$$

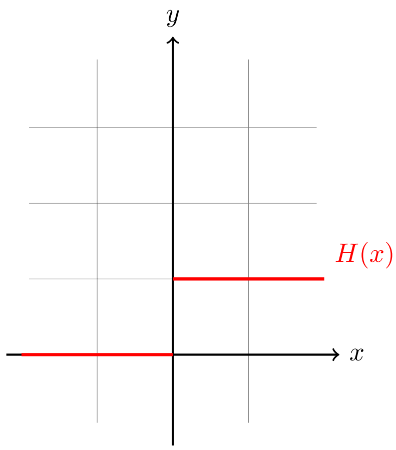
Démonstration : On peut voir cela comme un cas particulier de la proposition 1.2 (adaptée à nos nouvelles notations). Mais ici, on peut mener précisément le calcul.
Soit $p \in \mathbb{R}^*$, et $\epsilon > 0$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_\epsilon(t)dt = \int_0^{\epsilon} e^{-pt} f_\epsilon(t)dt = \int_0^{\epsilon} e^{-pt}\frac{1}{\epsilon}dt = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} e^{-pt}dt = \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\epsilon} = \frac{1}{-p\epsilon}\left(e^{-p\epsilon}-1\right).$
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, donc à l'aide du petit changement de variable $x = -p\epsilon$, on voit que $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{-p\epsilon}\left(e^{-p\epsilon}-1\right) = 1$.
Par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_\epsilon(t)dt = 1$.

À noter que dans ce cadre, on peut montrer en prenant $g : t \mapsto 2e^{-pt}$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}2\delta(t)dt = 2$ (reprendre la preuve précédente en multipliant tout par deux !). Cela donne un peu plus de sens à des phrases du style «on multiplie le Dirac par 2» (si l'on voit un Dirac comme une fonction on a plutôt envie d'écrire que $2\delta = \delta$, et l'on retombe dans le paradoxe de l'introduction...).

4 Dirac et fonction d'Heaviside

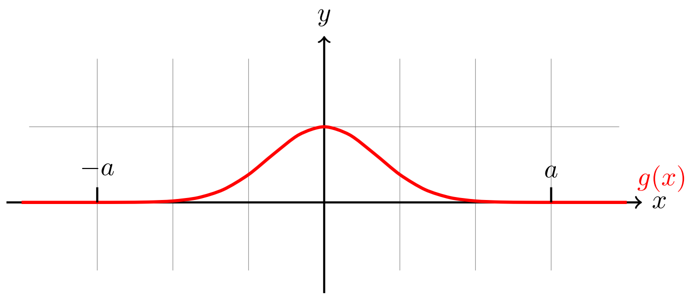
On revient aux notations de la section 2.
La fonction d'Heaviside est définie par

$$H : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$$



La fonction d'Heaviside.

On vous a peut-être dit dans d'autres matières que la dérivée de la fonction d'Heaviside était la fonction de Dirac. Mathématiquement, cela ne tient pas, la fonction de Heaviside n'étant pas dérivable en 0 (elle n'est même pas continue). Mais on peut donner un sens à cette proposition à l'aide de ce qui a été raconté dans ce poly.
Prenons une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle $[-a, a]$ – on peut penser par exemple à l'allure suivante :



Notons G sa primitive qui s'annule en a.

On a alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)H(t)dt = \int_0^a g(t)H(t)dt = \int_0^a g(t)dt = G(a) - G(0) = -G(0)$.

Par ailleurs, d'après la proposition 1.2, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\delta(t)dt = G(0)$.

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)H(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\delta(t)dt$,
que l'on peut réécrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G'(t)H(t)dt = [G(t)H(t)]_{-a}^{a} - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\delta(t)dt.$$

(Car on a $G(a) = 0$ et $H(-a) = 0$, d'où $[G(t)H(t)]_{-a}^{a}$.)

On rappelle que les $\int_{-\infty}^{+\infty}$ sont des abréviations pour $\int_{-a}^{a}$. La formule ressemble alors fortement à une intégration par parties, où l'on aurait $H'(t) = \delta(t)$. En voyant les choses comme cela, il est naturel de dire que «dans un certain sens» [8], $H' = \delta$ – en tout cas, on pourra utiliser cela pour faire des IPP dans des calculs d'intégrales comme le montrent les calculs ci-dessus.

8. Pas dans le sens du cours de maths de PCSI en tout cas...