Produit vectoriel

Quelques résultats sur le produit vectoriel. Il s'agit d'un objet assez peu prisé des mathématiciens, dans la mesure où il n'existe qu'en dimension 3.
Beaucoup des propriétés données ci-dessous ne sont pas démontrées, mais peuvent l'être facilement à l'aide de calculs élémentaires.
On travaillera dans $\mathbb{R}^3$ dans tout le poly, et l'on notera $u.v$ le produit scalaire «classique» (canonique) entre u et v dans $\mathbb{R}^3$.

Table des matières

1 Définition, premières propriétés

Il y a plusieurs définitions possibles du produit vectoriel. Voici la plus fréquente :

Définition 1.1 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$

Proposition 1.1 Le produit vectoriel est **antisymétrique** : $u \wedge v = -v \wedge u$.

Autre façon de voir le produit vectoriel : si l'on fixe $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, pour tout $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u \wedge v = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Un simple calcul permet de le vérifier. Cela donne immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1.2 Le produit vectoriel est linéaire à droite.

Et par antisymétrie :

Proposition 1.3 Le produit vectoriel est linéaire à gauche.

Exemple 1.1 On peut donc mener des calculs du style $(a + b) \wedge (c + d) = a \wedge c + a \wedge d + b \wedge c + b \wedge d$.

Attention, il est cependant en général peu pratique de mener des calculs avec plusieurs produits vectoriels, à cause de la propriété suivante :

Proposition 1.4 Le produit vectoriel n'est **pas associatif.**

Il existe des formules (pas forcément évidentes à retenir…) permettant de simplifier des doubles produits vectoriels le cas échéant :

Proposition 1.5
$u \wedge (v \wedge w) = (u.w)v - (u.v)w$
$(u \wedge v) \wedge w = (u.w)v - (v.w)u$

2 Colinéarité

Le produit vectoriel permet de caractériser la colinéarité.

Proposition 2.1 u et v sont colinéaires Ssi $u \wedge v = 0$.

Démonstration : Indication : pour le sens direct, distinguer les cas $u = 0$, et $v = \lambda u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et calculer les coordonnées de $u \wedge v$.

En particulier, on en déduit le résultat suivant, qui découle également de la bilinéarité (ou d'un calcul élémentaire) :

Proposition 2.2 $u \wedge 0 = 0 \wedge u = 0$.

3 Orthogonalité

Le produit vectoriel possède des propriétés intéressantes liées à l'orthogonalité :

Proposition 3.1 $(u \wedge v) \perp u$, $(u \wedge v) \perp v$.

Autrement dit :

Proposition 3.2 $(u \wedge v).u = 0$, $(u \wedge v).v = 0$.

Si u et v ne sont pas colinéaires, cela ne laisse donc pas le choix pour la direction de $u \wedge v$, qui devra appartenir à l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par u et v. Reste alors à déterminer son sens et sa norme.
On peut être plus précis :

Proposition 3.3 Soient u et v non-colinéaires. $w = u \wedge v$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- $w \perp u$ et $w \perp v$
- (u, v, w) est dans le sens direct (cf règle des 3 doigts – on peut définir mathématiquement la notion de «sens direct», mais ça n'est pas tout à fait simple).
- $\|w\| = \|u\| \, \|v\| \, |\sin(\widehat{u, v})|$

Démonstration : L'unicité découle de la remarque ci-dessus (à formaliser un peu plus…).
Pour la troisième propriété, le plus simple est de commencer par montrer (par un calcul brutal) que $\|u \wedge v\|^2 + \|u.v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$, puis d'utiliser la formule $\|u.v\| = \|u\| \, \|v\| \, |\cos(\widehat{u, v})|$.

4 Une équation avec un produit vectoriel

On s'intéresse à l'équation $u \wedge x = v \;\; (E)$, d'inconnue x, où u et v sont deux vecteurs fixés.

- Si u est nul, la résolution est immédiate (tout $x \in \mathbb{R}^3$ est solution si $v = 0$, et il n'y a pas de solution sinon.)
- Si u n'est pas orthogonal à v, il n'y a pas de solution (d'après 3.1).
- Sinon, on a d'après 1.5 $u \wedge (v \wedge u) = (u.u)v - (u.v)u = \|u\|^2 v$ (car $u.v = 0$). On en déduit que $x_0 = \dfrac{v \wedge u}{\|u\|^2}$ est une solution de (E).
  Or (E) est une équation linéaire en x (1.2). On a vu en maths que x est solution d'une telle équation Ssi x est la somme d'une solution particulière (ici x_0) et d'une solution de l'équation homogène associée – ici $u \wedge x = 0 \;\; (E_0)$. Or, d'après 2.1, les solutions de (E_0) sont exactement les vecteurs colinéaires à u.

On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 4.1 Soient u et v deux vecteurs orthogonaux, u étant de plus non-nul. Alors l'ensemble des solutions de

$$u \wedge x = v \quad (E)$$

est

$$\left\{ \frac{v \wedge u}{\|u\|^2} + \lambda u, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On obtient donc comme ensemble des solutions une droite affine (il ne s'agit pas forcément d'une droite vectorielle : elle ne passe pas par 0, sauf si $v = 0$).
Noter que les solutions obtenues sont bien toutes orthogonales à v (on le vérifie facilement à l'aide d'un produit scalaire), ce qui est rassurant vue l'équation de départ...