Pourquoi le r dans $r\ dr\ d\theta$?

Table des matières

1 Intégrale simple **1**
- 1.1 Changement de variable linéaire . . . 1
- 1.2 Changement de variable non-linéaire . . . 2

2 Intégrale double **2**
- 2.1 Cas linéaire séparable . . . 2
- 2.2 Cas général . . . 2
- 2.3 Exemple classique : passage en coordonnées polaire . . . 3
- 2.4 Intégrale triple . . . 4

Dans tout ce poly, on se place hors cas pathologique : toutes les fonctions sont supposées définies et continues sur l'ensemble sur lequel on les intègre. Je passe sous le tapis quelques autres détails mathématiques sordides.

1 Intégrale simple

1.1 Changement de variable linéaire

Considérons $f \in \mathcal{C}([0,1])$, et

$$I = \int_0^1 f(t)dt.$$

Effectuons le changement de variable $u = 2t$, avec la méthode vue en cours. On a $t = u/2$ puis $dt = \frac{1}{2}du$, d'où

$$I = \int_0^2 f(u/2)\frac{1}{2}du$$

Ce changement de variable a «déformé les abscisses» (dilaté ici) : au lieu d'intégrer sur $[0,1]$, on intègre maintenant sur $[0,2]$. Le facteur $1/2$ est là pour compenser cette dilatation – on munit $[0,2]$ d'un «poids linéaire» de $1/2$ afin que sa «masse totale» (le poids total $\times$ la longueur) soit toujours 1 [1].
L'interprétation physique classique est qu'à une petite variation dt de la variable t correspond une variation $\frac{1}{2}du$ de la variable u.
Avec une vision plus mathématique des choses, on voit t comme une fonction de u : $t : u \mapsto u/2$, et le $\frac{1}{2}$ est alors $t'(u)$, i.e. $\frac{dt}{du} = \frac{1}{2}$ en notation physicienne, d'où l'on retrouve le $dt = \frac{1}{2}du$ (qui n'a pas de sens mathématique en soi).

1. Le meilleur cadre pour comprendre cela est la théorie de la mesure - une mesure correspondant à cette notion intuitive de «poids linéaire». Vous ne l'étudierez pas en CPGE.

1.2 Changement de variable non-linéaire

Considérons $f \in \mathcal{C}([0,1])$, et
$$I = \int_0^1 f(t)dt.$$
Effectuons le changement de variable $t = \varphi(u)$ – où φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$.
$$I = \int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(1)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$
On peut voir cela comme une généralisation du changement de variable linéaire – si ce n'est que la déformation n'est plus la même partout : celle-ci est controlée par $\varphi'(u)$: par exemple, si en un point u_0, $\varphi'(u_0) = \dfrac{1}{2}$, c'est que «au voisinage de u_0», la déformation locale correspond à une dilatation d'un facteur 2 (comme dans le cas linéaire ci-dessus).

2 Intégrale double

2.1 Cas linéaire séparable

Soit $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ et
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right)\, dy$$
que l'on note en général
$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$$
ou
$$I = \int\int_{[0,1]^2} f(x,y)\, dx\, dy$$
Effectuons le changement de variable $(x,y) = (u/2, t/3)$ (si l'on voit l'intégrale double comme 2 intégrales simples successives, cela revient à faire successivement les changements de variable $y = t/3$ et $x = u/2$).
On obtient
$$I = \int_0^3 \int_0^2 f(u/2, t/3)\ 1/2.1/3.du\ dt = \int_0^3 \int_0^2 f(u/2,t/3)\ 1/6\ du\ dt$$
Le 1/6 compense ici une déformation de «surface» : $[0,1]^2$ (de surface 1) a été remplacé par $[0,3] \times [0,2]$ (de surface 6).

2.2 Cas général

On considère ici U et V deux parties de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ continue [2].
f est une fonction de 2 variables, que nous noterons (x,y).
Soit $\varphi : U \to V$, bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ [3].
La formule de changement de variable est de la forme suivante :
$$I = \int\int_V f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_U f(\varphi(u,v))\ ?(u,v)\ \ du\ dv$$

2. Nous n'avons pas vu ce que cela signifie pour des fonctions de 2 variables !
3. Même remarque...

où ?(u,v) correspond à la déformation locale de surface – et est donc intuitivement liée à la «dérivée» de φ.

La notion de «dérivée» pour une fonction de 2 variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est remplacée par celle de *matrice jacobienne.* Si l'on note $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, cette matrice est définie par

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Une façon «physicienne» [4] de comprendre cette matrice est de la multiplier par $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$
On obtient

$$J_\varphi(u,v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)du + \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)dv \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)du + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

La matrice $J_\varphi(u,v)$ explique comment (au voisinage du point (u,v)), une «surface infinitésimale» $du \times dv$ est transformée par φ en une autre surface infinitésimale $dx \times dy$.
Pour corriger la déformation liée au changement de variable, il faut compenser la variation de surface entre $du \times dv$ et $dx \times dy$.
Or, cette variation de surface est mesurée par le *déterminant* de $J_\varphi(u,v)$ (que nous avons effectivement interprété comme une surface dans le cours [5]).
Et voici donc la vraie formule de changement de variable :

$$I = \int\int_V f(x,y)\, dx\, dy = \int\int_U f(\varphi(u,v))\, |\det(J_\varphi(u,v))|\ du\ dv$$

2.3 Exemple classique : passage en coordonnées polaire

On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$, où S est le disque unité,

$$I = \int\int_S f(x,y)\, dx\, dy.$$

On souhaite effectuer le changement de variable $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
L'application sous-jacente est $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,2\pi] & \to & S \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$.
La jacobienne de cette application est

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$.
La formule de changement de variable est donc

$$I = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\ r\ dr\ d\theta.$$

ce qui explique le r dans le $r\ dr\ d\theta$.

4. Qui cache une formule mathématique rigoureuse de dérivation de composée. Les du, dv, dx et dy dont il est question n'ont pas vraiment de sens mathématique.

5. En fait, le déterminant est une mesure de surface algébrique. L'orientation n'ayant pas d'importance pour mesurer une surface géométrique, une valeur absolue va apparaitre dans la formule suivante

2.4 Intégrale triple

Ces mécanismes se généralisent complètement en dimension 3.
À titre d'exercice, vous pouvez regarder le cas du passage aux coordonnées sphériques, défini de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{array}\right. .$$

1. Écrire la matrice jacobienne correspondante.
2. Montrer que (avec les notations utilisées dans les intégrales) $dx\ dy\ dz = \rho^2\sin(\theta)d\rho\ d\theta\ d\varphi$.