Correction exos sur les exposants

Exercice 1

$$x^3x^7 = x^{10} \quad ; \quad (x^3)^7 = x^{21}$$
$$(xy^2)^3 \times (x^4y)^5 = x^3y^6x^{20}y^5 = x^{23}y^{11}$$
$$((x^2y)^2z^4)^3 = (x^4y^2z^4)^3 = x^{12}y^6z^{12}$$

Exercice 2

$$x^3 + x^7 = x^3(1 + x^4) \quad ; \quad 2x^5 - 6x^4 + 3x^7 = x^4(2x - 6 + 3x^3)$$

Exercice 3
Soit x un réel non nul.

$$u_{-n} = \frac{x^{-2n} + 1}{x^{-n}} = x^{-n} + x^n = \frac{1}{x^n} + x^n = \frac{x^{2n} + 1}{x^n} = u_n$$

Exercice 4
Soient x et y 2 complexes non nuls.

$$\frac{(x^{-2}y^5)^{-3}}{x^4y^{-3}} = \frac{x^6y^{-15}}{x^4y^{-3}} = x^2y^{-12} = \frac{x^2}{y^{12}}$$

Exercice 5
Soit x un réel > 0.

$$x^{2/3} = 4 \Leftrightarrow (x^{2/3})^{3/2} = 4^{3/2} \Leftrightarrow x = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$$

Exercice 6
Soient x, t des réels positifs :

$$\frac{\sqrt{x^4t^3}x^{3/2}}{x^3t^{-1/3}} = \frac{x^2t^{3/2}x^{3/2}}{x^3t^{-1/3}} = x^{1/2}t^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}} = x^{1/2}t^{11/6}$$

Exercice 7
$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.
Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$. En effet, $\sqrt{x^2}$ est par définition l'unique réel positif dont le

carré vaut x^2. C'est x si x est positif et $-x$ si x est négatif.

On a donc, pour tout réel t :

$$\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)|$$

Ainsi :

$$\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sin(t) \Leftrightarrow |\sin(t)| = \sin(t) \Leftrightarrow \sin(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{ il existe un entier } k \text{ tel que } t \in [2k\pi; 2k\pi + \pi]$$

Exercice 8

$$\ln(2x^3y^5) = \ln(2) + 3\ln(x) + 5\ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{4x^2y}{9t^4}\right) = \ln(4) + 2\ln(x) + \ln(y) - \ln(9) - 4\ln(t)$$
$$\exp(2x-3y) = \frac{\exp(2x)}{\exp(3y)} = \frac{(\exp(x))^2}{(\exp(y))^3}$$

Exercice 9
Soit x un réel > 0.

$$2\ln(x) = 3\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(2^3) \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8}$$

la dernière équivalence découle du fait que $x > 0$.

Soit a un réel.

$$\exp(2a) = 5 \Leftrightarrow 2a = \ln(5) \Leftrightarrow a = \ln(5)/2$$

Exercice 10
Soient x et y deux réels > 0.

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(5) \\ e^x e^y = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(xy) = \ln(5) \\ e^{x+y} = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

à partir de là, on tombe sur un système classique, que l'on peut résoudre en exprimant y en fonction de x et en reportant dans l'autre équation :

$$\begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ x(6-x) = 5 \end{cases}$$

la dernière équation s'écrit : $x^2 - 6x + 5 = 0$. La résolution donne $x = 1$ ou $x = 5$. D'où les solutions du système :

$$(x, y) = (1, 5) \text{ ou } (x, y) = (5, 1)$$

Exercice 11
Soient x et y deux réels > 0.

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2^x x y^3}}{5^y x^{1/3} y^{5/2}}\right) = \ln(\sqrt{2^x x y^3}) - \ln(5^y x^{1/3} y^{5/2}) = \frac{1}{2}\ln(2^x x y^3) - \ln(5^y) - \ln(x^{1/3}) - \ln(y^{5/2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(x\ln(2) + \ln(x) + 3\ln(y)) - y\ln(5) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{5}{2}\ln(y) = \frac{\ln(2)}{2}x + \frac{1}{6}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(y) - y\ln(5)$$

Exercice 12
En 6 jours, son poids est multiplié par 100. En 9 jours , son poids est multiplié par 1000. En $3 \times 6 = 18$ jours, son poids est multiplié par 10^6.
On a $f(t+3) = 10f(t)$ pour une certaine valeur de t (en fait pour tout t). D'où $a^{3+t} = 10a^t$, c'est à dire $a^3 a^t = 10a^t$. Or $a^t \neq 0$, on peut donc simplifier par a^t et on obtient : $a^3 = 10$, d'où $a = 10^{1/3}$. On trouve $a = 2.15$ à 10^{-2} près.
On cherche d (pour durée) telle que $f(t+d) = 2f(t)$. Ce qui nous conduit à $a^d = 2$, soit $d\ln(a) = \ln(2)$, donc $d = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$. On trouve $d = 0.90$ à 10^{-2} près, soit entre 21 et 22 heures.

Exercice 13
• montrons que, " pour tous entiers naturels n et p et pour tout complexe y, on a $(y^n)^p = y^{np}$."
Nous allons raisonner par récurrence simple sur p, l'entier n étant quelconque :
- initialisation : pour $p = 0$, pour tout complexe y et tout entier naturel n, $(y^n)^p = (y^n)^0 = 1$ et $y^{np} = y^0 = 1$. D'où la formule pour $p = 0$.
- hérédité : supposons que, pour p entier naturel fixé, la formule est vraie (pour tout complexe y et tout entier naturel n). Montrons la formule pour $p+1$: soit y un complexe et n un entier naturel, $(y^n)^{p+1} = z^{p+1}$, où l'on a posé $z = y^n$. Or $z^{p+1} = z \times z^p$, par définition. Donc $(y^n)^{p+1} = y^n(y^n)^p = y^n y^{np} = y^{n+np}$ d'après la formule prouvée dans le cours, d'où $(y^n)^{p+1} = y^{n(p+1)}$.
La formule est ainsi prouvée.

• montrons que, " pour tous complexes y et z, pour tout entier naturel n, on a $(yz)^n y^n z^n$".
Nous allons raisonner par récurrence simple sur n :
- initialisation : pour $n = 0$, pour tous complexes y et z, $(yz)^0 = 1$ et $y^0 z^0 = 1 \times 1 = 1$.
- hérédité : supposons que, pour tout n entier naturel fixé, la formule est vraie (pour tous complexes y et z). Montrons la formule pour $n+1$: soient y et z deux complexes, $(yz)^{n+1} = (yz)(yz)^n$ par définition. Or $(yz)^n = y^n z^n$, donc $(yz)^{n+1} = yzy^n z^n = yy^n zz^n = y^{n+1} z^{n+1}$.
La formule est démontrée.

• soit n un entier naturel. Soient y et z deux complexes, avec z non nul. Posons $t = 1/z$ et appliquons la formule précédente avec t à la place de z. On obtient : $\left(\frac{y}{z}\right)^n = (yt)^n = y^n t^n$.
Reste à prouver que "$t^n = \dfrac{1}{z^n}$." Or $tz = 1$, donc la formule prouvée ci-dessus, prouve que $(tz)^n = t^n z^n = 1^n = 1$. On a donc bien $t^n = \dfrac{1}{z^n}$.

Exercice 14

• montrons que " pour tout complexe non nul y et tous entiers relatifs n et p, $y^n y^p = y^{n+p}$. "

Nous avons prouvé cette formule pour n et p entiers positifs.

- supposons que n est négatif et p positif : on pose $a = -n$. Alors $y^n y^p = \dfrac{y^p}{y^a}$.

— si $n + p \geqslant 0$, alors $y^a y^{n+p} = y^{a+n+p}$, puisque $a$et $n + p$ sont entiers naturels. Or $a + n + p = p$. La formule en découle.

— si $n + p < 0$, posons $c = -n - p$ entier positif. Alors $y^p y^c = y^{p+c}$ car p et c sont deux entiers positifs. Or, $p + c = a$, donc $y^p y^c = y^a$, d'où $\frac{y^p}{y^a} = \frac{1}{y^c}$, c'est à dire : $y^p y^n = y^{n+p}$.

- supposons que n est positif et p négatif : en échangeant le rôle de n et p, on retombe sur le cas précédent.

- supposons que n et p sont entiers négatifs. Posons $a = -n$ et $b = -p$, puis $c = -n - p$. $y^a y^b = y^c$, puisque a, b sont 2 entiers positifs. D'où leurs inverses sont égaux aussi et enfin : $\frac{1}{y^a}\frac{1}{y^b} = \frac{1}{y^c}$, soit $y^n y^p = y^{n+p}$.

• montrons que " pour tout complexe non nul y et tous entiers relatifs n et p, $\frac{y^n}{y^p} = y^{n-p}$. "

D'après la formule montrée ci-dessus, on a $y^p y^{-p} = y^0 = 1$, donc $y^{-p} = \frac{1}{y^p}$ pour tous les entiers p. Ainsi $\frac{y^n}{y^p} = y^n y^{-p} = y^{n-p}$.

• montrons à présent que "$(y \times z)^n = y^n z^n$ pour tous complexes y et z et tout entier relatif". Nous l'avons prouvé pour les entiers positifs. Si n est négatif, posons $a = -n$. Alors $(y \times z)^n = \dfrac{1}{(yz)^a}$. Or $(yz)^a = y^a z^a$, puisque a est entier positif. Donc $(y \times z)^n = \dfrac{1}{y^a z^a} = y^n z^n$.

• enfin $\left(\dfrac{y}{z}\right)^n = y^n (1/z)^n = y^n / z^n$ (voir ci-dessus).

Exercice 15

Soit q un entier relatif non nul. La fonction $y \to y^q$ définie sur $]0, +\infty[$ est continue et même dérivable (admettons le pour l'instant, voir cours sur les fonctions). De plus, pour tout réel $y > 0$, $f'(y) = qy^{q-1}$. Or, $y^{q-1} > 0$ car $y > 0$, donc f' est de signe constant strict (positive si $q > 0$, négative sinon). Ainsi, f est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus f a pour limites 0 et $+\infty$ en les extrémités de son intervalle de définition. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $x^p > 0$ et f est continue , l'équation $f(y) = x^p$ a une solution, qui est unique car f est strictement monotone.

Soit k un entier relatif. Posons $q' = kq$ et $p' = kp$. Notons $a = x^{p/q}$ et $b = x^{p'/q'}$. Par définition $b^{kq} = x^{kp}$ et $a^{kq} = (a^q)^k$. Or $a^q = x^p$ par définition, donc $a^{kq} = (x^p)^k = x^{kp}$. Ainsi, $b^{kq} = a^{kq}$. Or a et b sont > 0 et la fonction $y \to y^{kq}$ est strictement monotone, d'où $a = b$. On a donc bien $x^{p/q}$ ne dépend pas du choix de la fraction représentant le rationnel p/q.

Exercice 16

Soient x et y deux réels > 0. Posons $z = 1/y$. On a $\ln(x/y) = ln(xz) = \ln(x) + \ln(z)$. Or $\ln(yz) = \ln(y) + \ln(z)$ et $yz = 1$, donc $\ln(y) + \ln(z) = \ln(1) = 0$. D'où $\ln(z) = -\ln(y)$.

D'où $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.

Soient a et b deux réels et $c = -b$. Alors $\exp(a-b) = \exp(a+c) = \exp(a)\exp(c)$. Or $\exp(b+c) = \exp(b)\exp(c)$ et $b+c = 0$, donc $\exp(b)\exp(c) = \exp(0) = 1$. D'où $\exp(c) = 1/\exp(b)$. D'où $\exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b)$.

Exercice 17

Soit x un réel > 0 et p, q deux entiers non nuls. Posons $a = x^{p/q}$. Par définition $a^q = x^p$. D'après la formule évoquée par l'énoncé, on a :

$$\ln(a^q) = q\ln(a) \text{ et } \ln(x^p) = p\ln(x), \text{ d'où } \ln(x^{p/q}) = \frac{p}{q}\ln(x)$$

Même idée pour l'autre formule...

Exercice 18

• $0^n = 0$ pour tout entier naturel n non nul et $0^0 = 1$. $1^n = 1$ pour tout entier naturel n. $(-1)^n = 1$ si n est pair, et vaut -1 si n est impair. Ainsi, dans chacun de ces cas z^n prend une ou deux valeurs, quand n parcourt $\mathbb{N}$.

• soit x un réel différent de $0, 1$ et -1. Montrons que les $x^n \neq x^p$, si n et p sont deux entiers naturels différents (on supposera que $n > p$ par exemple, ces 2 entiers jouant le même rôle). Raisonnons pas l'absurde : supposons que $x^n = x^p$. Alors, puisque $x^p \neq 0$ (car sinon x serait nul), on obtient en simplifiant : $x^{n-p} = 1$.
- premier cas : si $x > 0$. En appliquant la fonction LN à ce qui précède, on obtient $(n-p)\ln(x) = 0$. Or $n-p$ est non nul par hypothèse, d'où $\ln(x) = 0$ et donc $x = 1$, ce qui contredit notre hypothèse.
- second cas : si $x > 0$. On a $|x^{n-p}| = 1$, d'où $|x|^{n-p} = 1$ et on est ramené au premier cas, car $|x| > 0$.

Conclusion : on a prouvé par l'absurde que les $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous distincts 2 à 2.

• soit $z = i$. On a $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ etc... On remarque que l'on tourne en rond, ou plutôt... en carré. En effet la suite complexe $(i^n)_n$ est périodique de période 4, ce qui signifie que : pour tout entier naturel n , $i^{n+4} = i^n$ (car $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$). Ce qui prouve que pour tout entier naturel n, i^n prend l'une des 4 valeurs différentes $1, i, -1, -i$.

• soit z un complexe de module différent de 0 et 1. Notons $x = |z|$. On sait que, pour tout entier naturel n, $|z^n| = x^n$. Or x est un réel positif différent de 0 et de 1. Ainsi, d'après ce qu'on vient de montrer ci-dessus, les valeurs prises par x^n, quand n parcourt $\mathbb{N}$ sont toutes différentes 2 à 2. Il en résulte que les $(z^n)_n$ ont des modules différents 2 à 2 et sont à fortiori différents 2 à 2.

Exercice 19

• soit k un entier naturel non nul.
- pour calculer x^{2k}, il suffit de calculer $y = x^k$, soit $M(k)$ opérations, puis de calculer $y^2 = x^{2k}$, soit une opération de plus. Donc $M(2k) = M(k) + 1$.
- pour calculer x^{2k+1}, il suffit de calculer x^{2k}, soit $M(2k)$ opérations, puis de multiplier par x. Donc $M(2k+1) = M(2k) + 1 = M(k) + 2$.

• raisonnons par récurrence (forte) sur n :

- initialisation : pour $n = 1$, $M(1) = 0$ et $\dfrac{2\ln(1)}{\ln(2)} = 0$. Donc l'inégalité demandée est vraie pour $n = 1$.

- hérédité : soit n un entier naturel non nul fixé. Supposons que, pour tout entier naturel $k < n$, on a : $M(k) \leqslant \dfrac{2\ln(k)}{\ln(2)}$. Si n est pair, posons $n = 2k$. Alors k est un entier naturel vérifiant $k < n$. Donc, par hypothèse de récurrence, on a $M(k) \leqslant \dfrac{2\ln(k)}{\ln(2)}$. On a vu ci-dessus que $M(n) = M(k) + 1$. Donc :

$$M(n) \leqslant \frac{2\ln(k)}{\ln(2)} + 1 \leqslant \frac{2(\ln(k) + \ln(2))}{\ln(2)} = \frac{2\ln(n)}{\ln(2)}$$

Si n est impair, on pose $n = 2k + 1$. Alors k est un entier naturel vérifiant $k < n$. Donc, par hypothèse de récurrence, on a $M(k) \leqslant \dfrac{2\ln(k)}{\ln(2)}$. On a vu ci-dessus que $M(n) = M(k) + 2$. Donc :

$$M(n) \leqslant \frac{2\ln(k)}{\ln(2)} + 2 = \frac{2(\ln(k) + \ln(2))}{\ln(2)} \leqslant \frac{2\ln(n)}{\ln(2)}$$

Dans les 2 cas, on a bien $M(n) \leqslant \dfrac{2\ln(n)}{\ln(2)}$.