Notes de cours : bases de trigonométrie

Table des matières

Consignes générales - à lire impérativement

Les notes de cours sont divisées en 4 sections, correspondant aux 4 groupes de videos. Voici la façon de procéder, pour chacune des sections :

- Regarder la/les videos. **Utilisez la pause, prenez des notes, faites de petits calculs vous-même**.
- Lire la section de notes de cours correspondante, **en refaisant vous-même les choses.** Vous n'apprendrez jamais une formule en la lisant. Il faut l'**écrire** et la **manipuler** [1].
- **Chercher les exercices.**
- Laisser reposer (**au moins 24h**).
- Faites le quiz d'auto-évaluation en ligne **sans avoir le cours sous les yeux**.
- Si vous passez le test, passez à la section suivante. Sinon, vous n'avez pas correctement assimilé le cours. . . Il faut reprendre les étapes ci-dessus, et retenter un quiz d'ici quelques jours. . .

1. Si cela vous est possible, je vous conseille d'imprimer ces notes, de façon à pouvoir les annoter

1 Le cercle trigonométrique

Quelques résultats à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique (les résultats en gras doivent être connus par cœur – les autres doivent pouvoir être retrouvés instantanéments, de tête, en utilisant le style de raisonnements vus sur la video) :

θ	$\mathbf{0}$	$\pi/\mathbf{6}$	$\pi/\mathbf{4}$	$\pi/\mathbf{3}$	$\pi/\mathbf{2}$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$\mathbf{2}\pi$
$\cos(\theta)$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{0}$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\sin(\theta)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/2}$	$\mathbf{1}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

θ	0	$-\pi/6$	$-\pi/4$	$-\pi/3$	$-\pi/2$	$-2\pi/3$	$-3\pi/4$	$-5\pi/6$	$-\pi$	-2π
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	1
$\sin(\theta)$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	0

Proposition 1.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration : C'est une conséquence du théorème de Pythagore.

Proposition 1.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Exercice 1 Placer $\dfrac{5\pi}{12}$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2 Calculer

1. $\cos(5\pi)$
2. $\sin(11\pi/2)$
3. $\sin(19\pi/6)$
4. $\cos(-19\pi/3)$

Exercice 3 Vérifiez les relations $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour les valeurs de θ contenues dans les tableaux.

Exercice 4 À l'aide de la relation rappelée ci-dessus, et en utilisant $\cos(\pi/3) = 1/2$, retrouver $\sin(\pi/3)$ (attention au signe !).

2 Premières formules – interprétations géométriques

Proposition 2.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

Proposition 2.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

Proposition 2.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

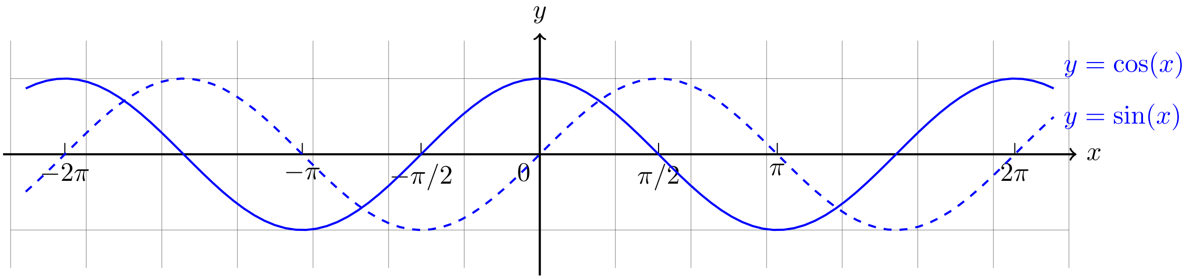
Proposition 2.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Exercice 5 Vérifiez ces formules pour des valeurs particulières données à la première section.

Exercice 6 En combinant les formules ci-dessus et/ou en utilisant le cercle trigonométrique, obtenir des formules pour :
- $\cos(\pi/2 + x)$
- $\sin(\pi/2 + x)$

Exercice 7 En utilisant le cercle trigonométrique, trouver les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) = \cos(x + \pi/4)$. Il n'est pas demandé une preuve formelle – juste de «deviner» le résultat sur le cercle trigonométrique.

Exercice 8 On donne les graphes des fonctions cos et sin. Interpréter chacune des formules vues ci-dessus géométriquement sur ces graphes.



3 Formules d'additions

On part de la formule suivante, que l'on admet : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (E_1).$$

En remplaçant b par $-b$, on obtient :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (E_2)$$

On veut maintenant avoir des formules similaires pour le sin. Nous allons donc utiliser la proposition 2.4, qui nous permet de passer du cos au sin :

$$\sin(a+b) = \cos(\pi/2 - (a+b)) = \cos((\pi/2 - a) - b)$$

On peut alors utiliser (E_2) avec $\pi/2 - a$ et b. On obtient :

$$\sin(a+b) = \cos(\pi/2 - a)\cos(b) + \sin(\pi/2 - a)\sin(b)$$

et en utilisant à nouveau la proposition 2.4,

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (E_3)$$

Enfin, en appliquant cette dernière formule à $-b$, on a

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \quad (E_4)$$

Résumons :

Proposition 3.1 (Formules d'addition) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (E_1)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (E_2)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (E_3)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \quad (E_4)$

À connaitre par cœur **et** à savoir reprouver.

Exercice 9 Regardez ce que donnent ces formules dans les cas particuliers où $b = 0$, $b = \pi$, $b = \pi/2$, $b = 2\pi$. On doit retomber sur des formules déjà rencontrées...

Exercice 10 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculez $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11 Si vous avez correctement assimilé la preuve ci-dessus, vous devez pouvoir, en admettant maintenant (E_4), reprouver $(E_1), (E_2)$ et (E_3). Allez-y ?

Exercice 12 Mettez un réveil dans 1 semaine. Êtes-vous encore capable d'écrire les formules (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4) et de les reprouver en admettant la première ? Si la réponse est non, c'est problématique : on n'apprend pas quelquechose pour l'oublier la semaine d'après !

Que se passe-t-il si l'on applique ces formules dans le cas où $a = b$?

- (E_2) donne $\cos(0) = \cos^2(a) + \sin^2(a)$, c'est-à-dire $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.
- (E_4) donne $\sin(0) = \sin(a)\cos(a) - \cos(a)\sin(a)$, c'est-à-dire $0 = 0$.

A priori, rien de bien intéressant, puisque nous savions déjà que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, et que $0 = 0$. **Mais**, cela vous fournit un moyen de vérifier que vos formules sont correctes, et que vous n'avez pas fait de mélange entre (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4)...
(E_1) et (E_3) donnent en revanche des formules nouvelles, et utiles, que vous étudierez à la rentrée (vous pouvez déjà bien sûr les écrire et le regarder).

4 Produits de $\sin$ et $\cos$

En combinant (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4), on obtient de nouvelles formules qui permettent de transformer des produits de sin et cos en sommes.
On peut effectuer les opérations suivantes :

- $\dfrac{(E_1)+(E_2)}{2}$
- $\dfrac{(E_2)-(E_1)}{2}$
- $\dfrac{(E_3)+(E_4)}{2}$

et l'on en déduit les formules suivantes :

Proposition 4.1 (Formules de linéarisation) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

Exercice 13 Pourquoi ne pas avoir indiqué dans la proposition ci-dessus la formule découlant de la différence entre (E_3) et (E_4) ?

Exercice 14 Appliquez ces formules dans des cas particuliers : $a = b$, $a = \pi$, $a = 0\ldots$

Dans certains cas, vous allez retomber sur des formules évidentes ou déjà vues. Dans d'autres cas, on obtient de nouvelles formules, dont certaines seront étudiées à la rentrée.
Lorsque vous écrivez une formule de linéarisation, vérifiez toujours votre résultat dans le cas ou $a = 0$ et dans le cas où $b = 0$. Cela permet de détecter un certain nombre d'erreurs... Un autre bon réflexe : **vérifier les parités**.

Exercice 15 Exprimer $\cos(a)\cos(b)\sin(c)$ comme somme de sin et de cos (vous pouvez procéder de 2 façons, et vérifier que vous tombez bien sur le même résultat.)

5 Exercices

Une fois le cours assimilé, cette section vous propose quelques exercices. Il faut réellement les chercher. Seules les solutions sont données. Il faut **réellement chercher** avant d'aller les consulter.

5.1 Énoncés

Exercice 16 On considère $\theta \in \mathbb{R}$.
À l'aide des formules d'addition, exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, puis uniquement en fonction de $\cos(\theta)$.
Vérifier votre résultat pour des valeurs simples de θ.

Exercice 17 On considère $\theta \in \mathbb{R}$.
À l'aide des formules d'addition, exprimer $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
Vérifier votre résultat pour des valeurs simples de θ.

Exercice 18 En utilisant les formules de linéarisation, et en vous inspirant de la démarche du début de la section 4, trouver des formules pour exprimer sous forme de **produits** de cos et de sin :

- $\cos(p) + \cos(q)$
- $\sin(p) + \sin(q)$

En déduire une formule pour

- $\cos(p) + \sin(q)$

Vérifier votre résultat pour des valeurs simples de p et q.

Exercice 19 On note $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

1. Pour quelles valeurs de θ cette expression a-t-elle un sens ? (On utilisera le cercle trigonométrique).
2. Quand a-t-on $\tan(\theta) = 1$? (On utilisera le cercle trigonométrique).
3. Exprimer $\tan(-\theta)$, $\tan(\pi + \theta)$, $\tan(\pi - \theta)$, et $\tan(\pi/2 - \theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ (on supposera que les quantités intervenant dans les calculs ont un sens).
4. Exprimer $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$ (on supposera que ces 3 quantités ont un sens).

5.2 Corrections partielles

Exercice 16
Solution : $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta)$, puis $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

Exercice 17
Solution : $\sin(4\theta) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$.

Exercice 18
Solutions :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\cos(p) + \sin(q) = \cos(p) + \sin(\pi/2 - q)$
  $= 2\cos\left(\frac{p+\pi/2-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-\pi/2+q}{2}\right)$
  $= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 19

1. Cette expression a un sens dès que $\cos(\theta) \neq 0$. Il faut donc exclure $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, et toutes les valeurs qui s'en déduisent en ajoutant ou retranchant 2π autant de fois que voulu.
2. On a $\tan(\theta) = 1$ si et seulement si $\cos(\theta) = \sin(\theta)$. En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que c'est le cas si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$, ou que θ se déduit de l'une de ces deux valeurs en ajoutant ou retranchant 2π autant de fois que voulu.
3. Solutions : $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$, $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$, $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$, $\tan(\pi/2 - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$.
4. Solution : $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.