Notes de cours : exposants

Table des matières

1 Exposants entiers

1.1 exposants entiers positifs

L'idée d'exposant entier est simple : que se passe-t-il lorsqu'on multiplie un nombre (réel ou même complexe) par lui-même un certain nombre de fois ? Et surtout comment noter le résultat ?

Rappel : pour tout nombre y, $y \times y$ se note y^2, $y \times y \times y$ se note y^3, etc...

Mais, que cache le " etc" ? En effet, comment définir comme ci-dessus y^{100000} ? C'est $y \times y \times ... \times y$ avec 100000 fois le symbole y et 99999 fois le symbole $\times$. Si cette définition passerait pour expliquer intuitivement ce dont il s'agit, elle n'est pas très efficace pour faire des calculs et surtout des démonstrations acceptables.

La définition efficace est une **définition par récurrence** : on définit y^n, pour tout nombre y et tout entier naturel non nul n, par : $y^n = y \times y^{n-1}$. Comme toute récurrence qui se respecte, il ne faut pas oublier d'initialiser notre définition : on posera $y^0 = 1$, pour tout nombre y. De sorte que $y^1 = y$ et donc $y^2 = y \times y$. Nous voilà rassurés ! [1]

1. nous verrons au cours de l'année que cette notion d'exposant entier s'applique à bien d'autres objets que les nombres : en fait, à tous les objets que l'on peut " multiplier" par eux-mêmes (les fonctions, les polynômes, les matrices, etc...). Les formules restent vraies, à l'exception des 2 dernières qui requièrent la propriété $y \times z = z \times y$

Une question légitime dans cette définition est la suivante : pourquoi avoir choisi $y^n = y \times y^{n-1}$, plutôt que $y^n = y^{n-1} \times y$? Et bien, parce qu'il fallait faire un choix et que ces 2 choix donnent heureusement la même notion d'exposant, comme le montrent les formules ci-dessous :

pour tous complexes y, z, pour tous entiers naturels n, p :

$$y^n \times y^p = y^{n+p} \quad ; \quad (y^n)^p = y^{np}$$

$$(y \times z)^n = y^n \times z^n \quad ; \quad \left(\frac{y}{z}\right)^n = \frac{y^n}{z^n}$$

(pour la dernière formule, on suppose que z est non nul)

Les démonstrations (appelées aussi preuves) se font par récurrence sur l'un des entiers intervenant dans une formule. A titre d'exemple, faisons la preuve de la première formule " $y^n \times y^p = y^{n+p}$" :

■ Raisonnons par récurrence sur l'entier n, l'autre entier p étant quelconque :

- initialisation : pour $n = 0$, on doit vérifier que, pour tout entier naturel p, " $y^0 \times y^p = y^{0+p}$" , c'est à dire que " $1 \times y^p = y^p$", ce qui est clair...

- hérédité : supposons vraie cette formule pour un entier naturel n fixé (et pour n'importe quel entier naturel p) et montrons-la pour $n+1$: or $y^{n+1} \times y^p = (y \times y^n) \times y^p = y \times (y^n \times y^p)$, car la multiplication est *associative* (on peut placer les parenthèses où l'on veut sans changer le résultat, on peut même les enlever). Donc $y^{n+1} \times y^p = y \times y^{p+n}$ (d'après l'hypothèse de récurrence), puis $y^{n+1} \times y^p = y^{p+n+1}$, par définition. Ce qui prouve la formule au rang $n + 1$. ■

Exercice 1
Simplifiez les expressions suivantes : $x^3 x^7; (x^3)^7; (xy^2)^3 \times (x^4 y)^5; ((x^2 y)^2 z^4)^3$.

Exercice 2
Factorisez de sorte à conserver des puissances positives de x : $x^3 + x^7; 2x^5 - 6x^4 + 3x^7$.

1.2 exposants entiers négatifs

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que d'exposant entier positif. Comment définir un exposant négatif, de sorte que l'on puisse conserver les formules de calcul ? Une condition nécessaire est que $x^{-n} \times x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1$. On peut donc définir , pour tout entier naturel n, " $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ". Prudence ! Ne pas oublier qu'il ne faut pas diviser par 0. Nous devons d'abord nous assurer que x^n n'est pas nul, c'est à dire que x n'est pas nul (un produit de nombres est nul si et seulement si l'un de ces nombres est nul).

Résumons : pour tout complexe z non nul et tout entier naturel n, on posera $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. Nous venons de voir que cette définition est nécessaire pour que les formules ci-dessus soient encore vraies pour des exposants négatifs. Est-ce suffisant ? Et bien oui ! (preuves à faire : exercice 14). On a donc :

pour tous complexes NON NULS y, z, pour tous entiers relatifs n, p :

$$y^n \times y^p = y^{n+p} \quad ; \quad \frac{y^n}{y^p} = y^{n-p} \quad ; \quad (y^n)^p = y^{np}$$

$$(y \times z)^n = y^n \times z^n \quad ; \quad \left(\frac{y}{z}\right)^n = \frac{y^n}{z^n}$$

Exercice 3
Soit x un réel non nul. On pose pour tout entier relatif n, $u_n = \dfrac{x^{2n}+1}{x^n}$. Justifiez que $u_{-n} = u_n$ pour tout entier n.

Exercice 4
Simplifier $\dfrac{(x^{-2}y^5)^{-3}}{x^4y^{-3}}$ où x et y sont 2 complexes non nuls.

2 Exposants rationnels

Suivant le même fil conducteur, on souhaite définir $z^{p/q}$ pour tous entiers relatifs non nuls p et q, de sorte que les formules restent vraies. C'est possible, mais à condition de réduire le domaine de définition (pour z) :
- on ne définit de puissance rationnelle non entière d'un nombre que si ce nombre est un réel strictement positif !
- le cas de $0^{p/q}$ est à part : on posera $0^{p/q} = 0$ si p et q sont des entiers > 0.
- on s'interdira donc d'écrire $(-1)^{1/2}$, ou $\sqrt{-1}$ ou $i^{1/2}$, par exemple...

Soit donc x un réel strictement positif. Une des contraintes sur $y = x^{p/q}$ est que $y^q = x^p$. Or, le théorème des valeurs intermédiaires couplé avec la stricte monotonie permet de dire (voir Exercice 15) que la fonction $y \to y^q$, que l'on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ prend une fois et une seule la valeur x^p. Autrement dit l'équation (en y) $y^q = x^p$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On note cette solution $x^{p/q}$. Le miracle est que cette définition ne dépend pas du choix de p et q, pour représenter la fraction p/q (voir Exercice 15), et que les formules restent valables. Résumons :

pour tous réels **strictement positifs** x et y, pour tous entiers non nuls p et q :

$$y = x^{p/q} \Leftrightarrow x^p = y^q$$

N'oubliez pas qu'une racine carrée est un cas particulier d'exposant rationnel, de même qu'une racine cubique, etc... Pour mémoire, rappelons que :

pour tout réel x positif (et x non nul pour la seconde) :

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

Exercice 5
Résoudre l'équation $x^{2/3} = 4$.

Exercice 6
Simplifiez l'expression, pour x, t des réels positifs : $\dfrac{\sqrt{x^4t^3}x^{3/2}}{x^3t^{-1/3}}$.

Exercice 7
Simplifiez $(\sqrt{x})^2$ pour tout réel positif x.
Calculez $\sqrt{3^2}$ et $\sqrt{(-3)^2}$. Donnez une formule générale pour x réel de $\sqrt{x^2}$.
Appliquez cela pour simplifier $\sqrt{1-\cos^2(t)}$. Pour quelles valeurs de t peut-on affirmer que " $\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sin(t)$ " ?

3 Exposants réels

Passer des exposants rationnels aux exposants réels est possible, mais difficile. C'est dû au lien entre rationnels et réels que nous explorerons un petit peu cette année. Pour éviter cet obstacle, on triche un peu, ou du moins on se sert d'outils que l'on ne construit pas explicitement : les fonctions LN et EXP, autrement dit le logarithme et l'exponentielle.

3.1 EXP et LN

L'histoire pourrait commencer comme ça : "Il était une fois 2 fonctions LN et EXP strictement croissantes, l'une transformait les produits en somme et l'autre faisait l'inverse." Autrement dit, on a les formules :

pour tous réels $x, y > 0$ et tous réels a et b :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad ; \quad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

De ces 2 formules fondamentales, on peut en déduire d'autres (voir Exercice 16) :

pour tous réels $x, y > 0$ et tous réels a et b :

$$\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y) \quad ; \quad \exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b)$$

pour tout entier relatif n :

$$\ln(x^n) = n\ln(x) \quad ; \quad (\exp(a))^n = \exp(na)$$

Exercice 8
Transformer les expressions : $\ln(2x^3y^5); \ln\left(\dfrac{4x^2y}{9t^4}\right); \exp(2x-3y)$.

D'ailleurs ces 2 fonctions sont *réciproques* l'une de l'autre en un sens que l'on précisera cette année : quand on applique l'une, puis l'autre on revient à son point de départ. Ce qui se traduit par les formules :

pour tout réel a et tout réel $x > 0$

$$\ln(\exp(a)) = a \quad ; \quad \exp(\ln(x)) = x$$

autrement dit :

$$a = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(a)$$

On a pu remarquer sur ces formules que exp est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors que pour ln, c'est l'inverse : elle n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9
Résoudre les équations : $2\ln(x) = 3\ln(2); \exp(2a) = 5$.

Exercice 10
Résoudre le système d'équations : $\ln(x) + \ln(y) = \ln(5)$ et $e^x e^y = e^6$.

3.2 exposants réels

Revenons sur la formule $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Si on lui applique exp, on obtient $x^n = \exp(n\ln(x))$, pour tout réel $x > 0$ et tout entier n.
Bingo : à droite du signe =, rien ne nous empêche de remplacer n par un réel α quelconque !!

On définit donc :

pour tout réel $x > 0$ et tout réel α, $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$

Les formules sur les exposants sont conservées...
Les formules sur les exp et ln s'étendent :

pour tout réel x strictement positif, pour tous réels a et α :

$$\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x) \quad ; \quad (\exp(a))^\alpha = \exp(a\alpha)$$

Cette dernière formule appliquée avec $a = 1$ donne, si l'on note $e = \exp(1)$: $e^\alpha = \exp(\alpha)$ pour tout réel α. C'est pour cette raison que l'on note souvent e^t au lieu de $\exp(t)$ pour désigner l'exponentielle d'un réel (et même d'un complexe comme on le verra...).

Exercice 11

Transformez en une somme de ln l'expression suivante : $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2^x x y^3}}{5^y x^{1/3} y^{5/2}}\right)$, où x et y sont deux réels > 0 .

Exercice 12

Le poids d'un organisme en période de division cellulaire peut être modélisé par une fonction $f : t \to a^t$ où a est un certain réel > 0 (t étant le temps).
- on observe que son poids est multiplié par 10 en 3 jours. En combien de jours son poids est-il multiplié par 100 ? , par 1000, par 10^6 ?
- quel est son taux de croissance journalier ? (par quel facteur son poids est-il multiplié en un jour) Quel rapport avec a ?
- en combien d' heures son poids est-il multiplié par 2 ? (durée moyenne d'une division cellulaire)

4 Exposants complexes

On rentre là dans une autre dimension (au sens propre du terme en maths). Vous connaissez déjà la notation e^{it}, pour tout réel t. Vous avez donc vu un exemple d'exposant complexe (imaginaire pur ici). La formule fondamentale de l'exponentielle est toujours vérifiée et résume les formules d'addition de trigonométrie.

Nous généraliserons cette notion à des exposants complexes quelconques, ce qui sera bien utile en physique...

5 Résumé

En bref, nous avons défini z^α sur des domaines (pour z) différents suivant la nature de l'exposant α :

- si n est un entier positif : z^n est défini pour tout complexe z.
- si n est un entier négatif : z^n est défini pour tout complexe non nul z.
- si α n'est pas entier : x^α est défini pour tout réel strictement positif x.
- on peut poser $0^\alpha = 0$ pour tout α réel strictement positif. Le cas de 0^0 étant problématique...

On a les formules suivantes pour des valeurs de x et y dans les domaines spécifiés ci-dessus, en fonction des valeurs des exposants α et β :

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \quad ; \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

6 Exercices pour approfondir

Exercice 13
Rédigez soigneusement la démonstration des formules pour les exposants entiers positifs.

Exercice 14
En vous basant sur les formules pour des exposants entiers positifs, montrez les formules pour les exposants entiers relatifs.

Exercice 15
Soit p et q deux entiers relatifs, avec q non nul, et x un réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression $f(y) = y^q$.
- Vérifiez que f est strictement monotone et continue sur son domaine de définition. Déduisez-en que l'équation (en y) $y^q = x^p$ a une unique solution strictement positive. On la note $x^{p/q}$.
- Vérifiez que l' on trouve la même solution si l'on remplace p par kp et q par kq (où k est un entier). Justifiez alors la phrase " la définition de $x^{p/q}$ ne dépend pas du choix de p et q, pour représenter la fraction p/q ."

Exercice 16
Déduisez les formules sur le LN d'un quotient de la formule sur le LN d'un produit et déduisez celle de l'EXP d'une différence de celle de l'EXP d'une somme.

Exercice 17
Déduisez des formules sur $\ln(x^n)$ et sur $\exp(nx)$ pour n entier que, pour tous entiers non nuls p et q, pour tout réel strictement positif x et tout réel a :

$$\ln(x^{p/q}) = \frac{p}{q}\ln(x) \quad ; \quad (\exp(a))^{p/q} = \exp\left(\frac{pa}{q}\right)$$

Exercice 18
Combien de valeurs différentes peut prendre z^n quand n décrit $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels ?
- répondez à cette question pour $z = 0, 1$ et -1.
- soit z un réel différent de ces 3 valeurs. On le note x. Montrez que les $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts 2 à 2 (sans utiliser d'argument sur les suites, du genre variation...) et répondez à la question de départ.
- soit $z = i$. Calculez z^2, z^3, z^4 et montrez que z^n ne prend que 4 valeurs différentes .
- soit z un complexe de module différent de 0 et de 1. En vous servant du module, montrez que les $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts 2 à 2.
- nous gardons le dernier cas, où $|z| = 1$, en exercice sur le cours à venir sur les complexes...

Exercice 19
Pour calculer à la main (ou dans sa tête) 2^{10}, on peut penser dans un premier temps à calculer les intermédiaires : $2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16; 2^5 = 32$; etc... $2^9 = 512$ et enfin $2^{10} = 1024$. Nous avons effectué 9 multiplications.

Existe-t-il une méthode plus économe en calculs intermédiaires ?

Remarquons que $2^{10} = (2^5)^2$, que $2^5 = (2^2)^2 \times 2$. On a donc : $2^2 = 4; 2^5 = 4^2 \times 2 = 32$ et $2^{10} = 32^2 = 1024$. Soit 4 multiplications au lieu de 9.

Généralisons : pour calculer x^n où x est un nombre complexe et n un entier naturel, on pourrait effectuer $n - 1$ calculs intermédiaires avec la première méthode. Combien de multiplications nécessite la seconde méthode ? Cela ne dépend que de n (et pas de x), on le note $M(n)$. On convient que $M(1) = 0$.

Justifiez que, pour tout entier naturel k non nul,

$$M(2k) = M(k) + 1 \quad ; \quad M(2k+1) = M(k) + 2$$

Traduction : pour calculer x^{2k}, j'ai besoin d'une opération de plus que pour calculer x^k, ...

Déduisez-en (par une hypothèse de récurrence supposant le résultat vrai jusqu'au rang n) que pour tout entier naturel non nul n :

$$M(n) \leqslant \frac{2\ln(n)}{\ln(2)}$$